DERIVATION : DERIVEES DE FONCTION PRODUIT OU CARRE — FICHE2

RAPPEL : dérivées des fonctions usuelles

fonction :	$f(x) = k$ (constante)	$f(x) = ax + b$	$f(x) = x^n$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
fonction dérivée :	$f'(x) = 0$	$f'(x) = a$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = -\sin x$	$f'(x) = \cos x$

Dans cette fiche, on va utiliser les formules suivantes :

❸ La fonction dérivée de **u.v** est la fonction **u'.v + u.v'**

❹ La fonction dérivée de **u²** est la fonction **2.u'.u**

EXERCICE 1 : Déterminer la dérivée de la fonction f (sous la forme u²) sur l'intervalle I.

1. $f(x) = (5x + 3)^2$, $I = \mathbb{R}$

$u = 5x + 3$

$u' = 5$

Donc $f'(x) = 2 \times 5 (5x + 3)$

$f'(x) = 10 (5x + 3)$

2. $f(x) = (1 - 3x)^2$, $I = \mathbb{R}$

$u = 1 - 3x$

$u' = -3$

Donc $f'(x) = 2 \times (-3) (1 - 3x)$

$f'(x) = -6 (1 - 3x)$

3. $f(x) = (2x^3 + 1)^2$, $I = \mathbb{R}$

$u = 2x^3 + 1$

$u' = 6x^2$

Donc $f'(x) = 2 \times 6x^2 (2x^3 + 1)$

$f'(x) = 12x^2 (2x^3 + 1)$

4. $f(x) = \sin^2 x$, $I = \mathbb{R}$

$u = \sin x$

$u' = \cos x$

Donc $f'(x) = 2 \cos x \sin x$

5. $f(x) = \cos^2 x$, $I = \mathbb{R}$

$u = \cos x$

$u' = -\sin x$

Donc $f'(x) = -2 \cos x \sin x$

6. $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2$, $I = [0 ; +\infty[$

$u = 1 + \sqrt{x}$

$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \sqrt{x})$

$f'(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

EXERCICE 2 :

Déterminer la dérivée de la fonction f (sous la forme u.v) sur l'intervalle I.

1. $f(x) = x\sqrt{x}$, $I = [0 ; +\infty[$

$u = x$; $v = \sqrt{x}$

$u' = 1$; $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x})^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$

2. $f(x) = x^2\sqrt{x}$, $I = [0 ; +\infty[$

$u = x^2$; $v = \sqrt{x}$

$u' = 2x$; $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $f'(x) = 2x \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x^2$

$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

3. $f(x) = (2x - 3)(5x + 1)$, $I = \mathbb{R}$

$u = 2x - 3$; $v = 5x + 1$

$u' = 2$; $v' = 5$

Donc $f'(x) = 2 \times (5x + 1) + (2x - 3) \times 5$

$f'(x) = 10x + 2 + 10x - 15 = 20x - 13$

4. $f(x) = x \cos x$, $I = [0 ; +\infty[$

$u = x$; $v = \cos x$

$u' = 1$; $v' = -\sin x$

Donc $f'(x) = 1 \times \cos x + x \times (-\sin x)$

$f'(x) = \cos x - x \sin x$

5. $f(x) = x^3 \cos x$, $I = [0 ; +\infty[$

$u = x^3$; $v = \cos x$

$u' = 3x^2$; $v' = -\sin x$

Donc $f'(x) = 3x^2 \times \cos x + x^3 \times (-\sin x)$

$f'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$

6. $f(x) = \sqrt{x} \sin x$, $I = [0 ; +\infty[$

$u = \sqrt{x}$; $v = \sin x$

$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $v' = \cos x$

Donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \sin x + \sqrt{x} \times \cos x$

$f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos x = \frac{\sin x + 2x \cos x}{2\sqrt{x}}$