DERIVATION : DERIVEES D'UNE FONCTION INVERSE OU QUOTIENT — FICHE3

RAPPEL : dérivées des fonctions usuelles

fonction :	$f(x) = k$ (constante)	$f(x) = ax + b$	$f(x) = x^n$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
fonction dérivée :	$f'(x) = 0$	$f'(x) = a$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = -\sin x$	$f'(x) = \cos x$

Dans cette fiche, on va utiliser les formules suivantes :

❺ La fonction dérivée de $\frac{u}{v}$ est la fonction $\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

❻ La fonction dérivée de $\frac{1}{u}$ est la fonction $\frac{-u'}{u^2}$

EXERCICE 1 : Déterminer la dérivée de la fonction f (sous la forme $\frac{1}{u}$) sur l'intervalle I.

Rq : Ne pas développer le dénominateur car on veut son signe et c'est un carré donc cela sera positif.

1. $f(x) = \frac{1}{5x+3}$ $\quad I = \mathbb{R}^+$ $u = 5x + 3$ $u' = 5$ Donc $f'(x) = \frac{-5}{(5x+3)^2}$	**2.** $f(x) = \frac{1}{1-3x}$, $\quad I = [1;+\infty[$ $u = 1 - 3x$ $u' = -3$ Donc $f'(x) = \frac{-(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{3}{(1-3x)^2}$	**3.** $f(x) = \frac{1}{2x^2+1}$, $\quad I = \mathbb{R}$ $u = 2x^2 + 1$ $u' = 4x$ Donc $f'(x) = \frac{-4x}{(2x^2+1)^2}$
4. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $\quad I =]0 ; \pi [$ $u = \sin x$ $u' = \cos x$ Donc $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$	**5.** $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $\quad I = [0; \frac{\pi}{2}[$ $u = \cos x$ $u' = -\sin x$ Donc $f'(x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	**6.** $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $\quad I = [0 ; +\infty[$ $u = 1 + \sqrt{x}$ $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Donc $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

EXERCICE 2 : Déterminer la dérivée de la fonction f (sous la forme $\frac{u}{v}$) sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$, $\quad I =]0 ; +\infty[$ $u = \sqrt{x}$ $\quad v = x$ $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad v' = 1$ Donc $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x - \sqrt{x} \times 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{2(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}}{x^2}$ $= \frac{\frac{x-2x}{2\sqrt{x}}}{x^2} = \frac{\frac{-x}{2\sqrt{x}}}{x^2} = \frac{-x}{2\sqrt{x}\,x^2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$	**2.** $f(x) = \frac{2x-3}{5x+1}$, $\quad I = \mathbb{R}^+$ $u = 2x - 3$ $\quad v = 5x + 1$ $u' = 2$ $\quad v' = 5$ Donc $f'(x) = \frac{2 \times (5x+1) - (2x-3) \times 5}{(5x+1)^2} = \frac{10x+2-10x+15}{(5x+1)^2}$ $f'(x) = \frac{17}{(5x+1)^2}$
3. $f(x) = \frac{x^3}{\sin x}$, $\quad I =]0 ; \pi [$ $u = x^3$ $\quad v = \sin x$ $u' = 3x^2$ $\quad v' = \cos x$ Donc $f'(x) = \frac{3x^2 \times \sin x - x^3 \times \cos x}{\sin^2 x} = \frac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}$	**4.** $f(x) = \frac{x}{\cos x}$, $\quad I = [0; \frac{\pi}{2}[$ $u = x$ $\quad v = \cos x$ $u' = 1$ $\quad v' = -\sin x$ Donc $f'(x) = \frac{1 \times \cos x - x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$