Conseils et méthodologie
Pour bien commencer ...

Avant toute chose il faut avoir à l'esprit qu'il vaut mieux avoir de courtes et vraies plages de travail que de longues plages de faux travail. Mieux vaut travailler deux heures sans être perturbé(e) que de "travailler" toute une après-midi avec l'ordinateur, la télévision à côté de soi. Il est plus rentable d'en faire peu mais bien, que beaucoup mais mal. Ceci doit se vérifier aussi dans la qualité du travail, mieux vaut ne pas tout faire, mais de façon approfondie que beaucoup superficiellement. C'est la même philosophie en devoirs surveillés : il est préférable de faire peu de questions en faisant le plein des points que beaucoup de questions traitées de façon expéditive où l'on perd beaucoup de points.
Dans l'autre sens, il faut se ménager de vraies pauses, en sortant du lieu de travail et en coupant avec une petite activité vraiment différente.

I Conseils Généraux

1.1 Généralités sur l'activité mathématique

1.1.1 Objets mathématiques et phrases mathématiques

Avant tout, prenez conscience que lorsqu'on "fait des maths", comme dans n'importe quelle autre activité, on **manipule des objets** ayant une nature précise (nombre, fonction, vecteur).

Dans un texte (mathématique ou autre), chaque symbole représente un objet précis. Il faut garder en permanence en mémoire la nature de chacun de ces objets, ainsi que la manière dont chacun peut être utilisé. C'est absolument capital pour la compréhension d'un cours ou la rédaction d'un texte (par exemple la résolution d'un exercice...).
Souvent, l'incompréhension face à un cours ou pendant la résolution d'un problème provient d'un manque de conscience du **sens des symboles** et de la **connexion entre les différents objets considérés**.

L'incompréhension peut aussi être due à des difficultés avec le langage mathématique en général : pour manipuler les objets mathématiques, **on doit faire des phrases** avec sujet, verbe, complément, etc. , comme dans n'importe quel autre langage.

Par exemple, la phrase "$x = 5$" s'écrit en français :

x (sujet)" égale (verbe) *cinq* (C.O.D.)"

Pourtant, nombreux sont les élèves qui perdent de vue ce principe et font rimer mathématique et magique : au lieu d'écrire des phrases simplement cohérentes, ils invoquent les termes sacrés et des symboles mystérieux, en espérant que cela aura un sens (et rapportera quelques points...)

Lorsque vous écrivez, faites des phrases EN FRANÇAIS (avec des verbes...). Structurez votre pensée avec des paragraphes, des tirets, des numéros, une structure **visible** formée de phrases grammaticalement correctes.

Lorsque vous lisez un texte, cours ou énoncé, et que vous vous sentez perdu(e), reportez-vous à l'énoncé ou au contexte pour retrouver le sens de tel symbole qui vous a échappé, le lien entre tels objets vus précédemment, etc.

Enfin, lisez les textes en entier ! D'une part, il arrive fréquemment que l'on n'arrive pas à comprendre ce qui est écrit *parce que l'on a omis de lire une phrase, voire un paragraphe entier...* D'autre part il arrive souvent que la lecture de parties ultérieures d'un texte, en particulier d'un énoncé, nous éclaire sur des parties antérieures.

Une fois ces habitudes prises, on peut commencer à "faire des maths".

1.1.2 La règle d'or : principes, hypothèses et déduction

"Faire des mathématiques", c'est avant tout parvenir à un chemin correct d'un point de vue logique, partant d'une phrase A pour arriver à une phrase B (phrase que l'on ne connaît pas forcément au début).

La phrase de départ A peut être :

- un **résultat du cours** : axiome, théorème... (exemple : "Par un point donné, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.") ;
- un **élément de l'énoncé** (exemple : "Comme le triangle ABC est équilatéral, alors $AB = BC = CA$) ;
- une **conjecture** dont on ignore si elle est vraie, et que l'on veut soi-même tester : "je ne suis pas sûr(e) que la phrase A soit vraie, mais si elle était vraie, quelles en seraient les conséquences ?" Si les conséquence amènent à une contradiction, c'est que la phrase A était fausse.

Le gros problème de beaucoup d'élèves : **bien penser à utiliser toutes les hypothèses.** Il est donc CAPITAL de retenir les hypothèses des théorèmes, qui sont leurs conditions d'utilisation, si on ne veut pas faire n'importe quoi.

1.2 Les objets qu'on manipule : les *symboles*

1.2.1 Pourquoi utiliser des lettres et des symboles ?

Il y a fondamentalement deux raisons.

Premièrement, faire des mathématiques, c'est avant tout manipuler des objets qui sont dans notre tête, et pas dans le monde physique. Pour les manipuler, on doit leur donner un nom : c'est ce nom que l'on va appeler à chaque fois qu'on voudra toucher à un objet (exemple : le nombre 2, le point A). Ce nom est à son tour représenté sur le papier par un symbole (2, A). On n'a pas le choix.

Mais lorsque l'on change de classe, des choses se mettent parfois à devenir plus compliquées : on se met à avoir des "a" et des "b" à la place de "3" ou de "4,5". Souvent des élèves disent, à propos d'un exercice présentant des calculs (par exemple des équations, ou des choses plus abstraites) : "lorsque c'est avec des nombres, j'y arrive, mais quand il y a des lettres, je ne comprends plus rien".

Pourtant, les nombres sont écrits avec des chiffres, en suivant des règles qui ne sont pas si simples : le "2" qui est chiffre des unités ne fait pas tout à fait la même chose que le "2" qui est chiffre des dizaines. Mais ces règles vous sont naturelles car vous les avez intégrées dès le plus jeune âge.

L'utilisation des lettres est un saut d'abstraction : plutôt que de compter avec les nombres, on compte avec des symboles qui représentent ces nombres, et que l'on arrive à manipuler parce que l'on connaît bien les règles de calcul.

Voici donc la deuxième raison : L'emploi de symboles permet de généraliser les calculs. Pour pouvoir aller plus loin, on a besoin de se débarrasser des cas particuliers : si on compte uniquement sur ses doigts, on est vite limité.

Ecrire les nombre à l'aide de chiffres sera suffisant pour tenir les comptes de son magasin, mais ne suffira pas pour résoudre des problèmes plus compliqués. On a alors besoin de parler de n'importe quel nombre et de le représenter à l'aide d'une lettre (x par exemple).

Considérons cet exercice : Existe-t-il un nombre entier qui n'est pas multiple de 3 et dont le carré est multiple de 3 ? On peut le résoudre en notant x le nombre entier recherché (essayez !).

1.2.2 Présentez vos nouveaux amis

En mathématiques, on fait référence aux objets en utilisant leur nom : un nombre réel sera par exemple appelé x, f sera le nom d'une fonction... Il y a alors deux possibilités :

• Soit on connaît exactement l'objet dont on parle (par exemple x vaut 2, f est la fonction racine carrée).

• Soit l'objet est indéterminé mais appartient à une certaine catégorie (par exemple, x est un nombre entier naturel, f est une fonction croissante).

Lorsque l'on travaille avec des tels objets, il faut toujours préciser la catégorie à laquelle ils appartiennent. Par exemple, considérons l'équation $x^2 = 1$. Il faut indiquer si l'on cherche les solutions parmi les nombres positifs (auquel cas x vaut 1) ou les nombres réels (auquel cas x peut valoir 1 ou -1).

Avant d'utiliser un symbole, il faut toujours le "présenter", en précisant ce qu'il représente. **On doit donc systématiquement préciser ce qu'on veut dire lorsqu'on utilise un symbole qui n'est pas clairement déterminé.**

1.3 *Faire des Mathématiques* : chercher, expliquer, rédiger,

Ces trois verbes constituent une énorme partie de l'activité mathématique, et sont indéfectiblement liés.

• **Chercher** n'est pas *trouver*. Prenons le cas des exercices, même si ce qui suit est aussi valable pour la lecture d'un cours.

A la lecture d'une question, certains élèves ont l'habitude de comprendre quasi instantanément ce qu'ils doivent faire pour la résoudre. ils entrent directement dans la partie technique de la résolution. Cela est dû, d'une part, à leurs facultés intellectuelles et, d'autre part, à la relative facilité des problèmes auxquels on est généralement confronté au lycée.

Conséquence perverse de cette situation : ces élèves, confrontés à un nouveau type de problème et ne voyant pas quoi faire tout de suite, se sentent souvent perdus, persuadés qu'ils n'arriveront jamais à en trouver la solution.

Cette croyance est fausse. Pour s'améliorer réellement, il faut dépasser les limites de ce qui est naturel en se frottant à des choses qu'on n'arrive pas à faire du premier coup. Cela implique en premier lieu de combattre une certaine angoisse de l'échec, et d'intégrer l'idée que la compréhension totale passe :
- par des étapes de compréhension partielle ;
- par des erreurs, riches en enseignements ;
- par des oublis, qui nous montrent combien la disparition de tel élément de notre mémoire affecte l'ensemble de l'édifice.

Ainsi, après une tentative infructueuse sur un exercice ou un cours, il faut s'y frotter à nouveau, deux heures, deux jours ou deux mois après.

En outre, pour aider à avancer dans le noir, il faut de la méthode. Pour cela nous vous renvoyons à la prochaine section (Comment chercher un exercice).

• **Expliquer**. En tant qu'élève, vous devez régulièrement convaincre le correcteur de la véracité de vos propos. En tant qu'enseignant, notre premier objectif est de rendre intelligibles des choses qui sont au préalable inconnues de nos élèves.

Dans votre future activité professionnelle, il vous faudra bien souvent expliquer des choses. Ainsi, expliquer constitue la partie sociale de toute activité ayant une composante intellectuelle, surtout en maths où "tout est dans la tête".
Réciproquement, tenter d'expliquer quelque chose est une bonne manière de se l'approprier et d'en

maîtriser réellement le fonctionnement, car cela nécessite d'adapter son discours en fonction de ce qu'on trouve réellement important.

Il faut donc comprendre pour expliquer, mais expliquer aide à comprendre. C'est ainsi que la recherche et l'explication sont liées, les deux activités étant mutuellement bénéfiques.

• **Rédiger.** En mathématiques, la rédaction est le produit fini. Dans ce domaine comme dans d'autres, c'est ce sur quoi vous serez jugé, ou ce en quoi vous serez utile. Existe-t-il pour autant UNE SEULE rédaction correcte et naturelle pour chaque problème rencontré ? Non. Il y a souvent plusieurs manières d'aborder un problème, et donc d'en construire une solution.

Toutefois, il y a des conditions à remplir pour donner une bonne solution. Une bonne solution doit être **juste** (c'est-à-dire correcte d'un point de vue formel), **complète** (il ne doit rien manquer d'essentiel) et **claire** (le raisonnement doit être le plus concis et le plus possible).

S'il est évident que le fait d'avoir cherché et de pouvoir expliquer sont des pré-requis pour une rédaction finale, la recherche comme l'explication sont grandement aidées par des rédactions partielles, faites au fur et à mesure : on ne peut pas penser à tous les aspects d'un problème en même temps, et coucher ses idées sur papier, devant ses yeux, permet de les avoir à proximité et de ne pas se perdre.

Lorsqu'on cherche à comprendre un problème nouveau, le va-et-vient permanent entre ce qu'on construit dans sa tête et ce qu'on a conservé devant ses yeux sur un papier permet d'accoucher d'une idée nouvelle qui nous manquait pour conclure cette recherche, pour expliquer ce problème.

C'est en ce sens que le travail de rédaction, à l'écrit (insistons sur ce point), est intrinsèquement lié au reste, à la fois comme but et comme moyen.

II Comment chercher un exercice ?

Résoudre un problème de mathématiques, c'est souvent une aventure, un parcours, un combat.

Au bout d'un moment, quand on en a livré beaucoup, les combats semblent naturels et les techniques viennent spontanément. Au début on peut se sentir désarçonné, voire abattu, quand on a l'impression qu'on n'avance pas.

S'il n'y a pas de recette miracle et que rien ne remplace la pratique, nous pouvons néanmoins donner quelques conseils et dégager des techniques utiles. La phase de recherche peut être libre, brouillonne, partiellement fausse si c'est votre style. N'hésitez pas à coucher sur le papier des débuts de calculs et des idées mêmes partielles. Elle doit aussi contenir des phases sérieuses où les avancées sont bien justifiées, sécurisées, solidifiées, où des calculs importants sont bien posés. Et bien sûr la phase de rédaction est là pour mettre les choses au propre et les idées au clair.

De même que le professeur ne peut pas *manger à votre place*, il ne peut pas *comprendre à votre place* ! Tout juste peut-il rendre votre *effort de compréhension* plus aisé, plus agréable, plus progressif, et vous signaler vos erreurs, pour que *vous* les corrigiez.

Bref, chercher, c'est éviter la passivité et prendre en main la compréhension. Pour cela, il faut poser le problème de manière claire :

- Qu'est-ce que je sais / qu'est-ce que je veux montrer ?
- Élaborer un plan et le suivre.

Plusieurs phases sont nécessaires : *reconnaissance,stratégie, tactique et technique.*
Dans **la phase stratégique**, on essaye de comprendre le problème en se posant les bonnes questions : que cherche-t-on ? que sait-on ? quelles sont les contraintes ? quels sont les objets importants et leurs notations ? Et on introduit éventuellement les notations manquantes.

Dans **la phase tactique**, on élabore et on met en œuvre un plan d'action fondé sur sa stratégie : comment peut-on reformuler le problème ? Raisonnement direct ou indirect ? Connaît-on des problèmes déjà résolus qui pourraient être en relation avec notre question ? En particulier, quel(s) domaine(s) du cours pourraient être en rapport avec cette question ?

Dans la (ou les) **phase(s) technique(s)**, on applique les méthodes (calculs, logique, etc.) permettant de vérifier les idées développées plus haut. C'est ici qu'on valide ces idées, qu'on trouve un résultat, etc.

Remarque 1. *Les élèves ont tendance à se plonger tout de suite dans la technique. « Je vous parle méthode et vous me répondez technique ». « De quoi ça parle ? », avant« comment on fait ? »*

Prenons un exemple simple : on a un triangle rectangle dont l'hypothénuse vaut 5 *et l'un des côtés adjacents vaut* 4. *Quelle est la longueur du troisième côté ? La méthode est : « on utilise le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle » et la technique est le calcul «* $\sqrt{5^2-4^2}$ *».*

Cette partie aborde quelques aspects de la phase de recherche en mathématiques.

- Chercher et ne pas trouver.
- Chercher en mode robot, la méthode déductive.
- Chercher en commençant par simplifier le problème.
- Chercher en utilisant la solution.
- Dessiner c'est gagné.

2.1 Chercher et ne pas trouver.

Une personne qui fait des mathématiques apprend à ne pas toujours gagner ou à devoir s'y reprendre à plusieurs fois, alors qu'au début, beaucoup pensent : « je n'y arriverai jamais » ou « j'ai cherché une heure et je n'ai pas trouvé donc j'ai perdu une heure ». Et bien non. L'heure passée a peut-être entamé votre adversaire, et cette heure de travail vous a sûrement permis de vous familiariser avec ses points forts et ses points faibles. La prochaine fois, sur celui-là ou sur un autre, l'issue sera peut-être différente.

Devant un exercice à résoudre, on peut penser à la situation suivante. Votre but est d'atteindre une île à la nage depuis le rivage et vous vous jetez à l'eau. Vous ferez peut-être demi-tour car vous ne parviendrez pas à atteindre l'île, par manque de force. Mais vous n'avez pas tout perdu : vous perfectionnez votre technique de nage et vous vous familiarisez avec les courants. Peut-être que la prochaine fois vous irez bien plus loin, et vous finirez sûrement par y arriver, même si, comme pour la résolution de l'exercice, les premiers essais ont pu être un peu ingrats et laisser un sentiment d'échec pur et simple.

Dans le monde de la recherche, le problème posé ne sera pas toujours résolu. Mais le chemin parcouru, s'il n'a pas mené au but, peut avoir fait apparaître des choses très intéressantes, peut-être même plus intéressantes que le but initial. Autrement dit, parfois nous ne résolvons pas le problème de départ mais un autre problème, qui vaut pour lui-même et peut très bien constituer une première étape vers l'objectif. Les exemples dans le quotidien des chercheurs ne manquent pas. Pour citer un exemple fameux, à plus grande échelle, la recherche d'une preuve pour le théorème de Fermat a donné naissance à des branches entières des mathématiques (courbes elliptiques, formes modulaires). Nous pourrions en dire de même pour la conjecture de Riemann et celle de Poincaré, démontrée récemment. En n'atteignant pas le but tout de suite, le chercheur est amené à se poser beaucoup de questions et à chercher à développer de nouveaux outils ou points de vue, avec comme ligne directrice la résolution du problème. Le problème devient une motivation en soi pour avancer, un moteur dans le développement d'idées.

Enfin ne vous découragez pas parce que vous trouvez que les autres sont plus rapides. Il y a toujours des gens plus rapides que soi. Et puis, ils ont peut-être tout simplement plus d'entraînement. Enfin, si la rapidité donne des points dans les premiers examens ou concours de votre scolarité, elle ne donne pas toutes les clefs...

2.2 Chercher en mode robot.

Bien souvent, un problème de mathématiques, ce sont quelques hypothèses et un résultat à prouver. On a donc tendance à écrire les hypothèses en haut de sa feuille et le résultat en bas. Le but ? Écrire les lignes successives qui permettent de relier le haut (les hypothèses) au bas (la conclusion) avec à chaque étape des implications claires. Qu'est-ce qu'une implication claire ? Quelque chose qui est évident du point de vue logique ou mathématique. Il n'est pas toujours facile de savoir ce qui évident et ce qui ne l'est pas. Mais si vous êtes le seul à trouver qu'une étape est évidente, c'est mal parti. Il faut que vos camarades soient également convaincus. Mettez-vous dans la peau du professeur qui veut lui aussi être convaincu par votre raisonnement. Acceptera-t-il votre argument sans broncher ? Oui quand l'implication est garantie par un résultat du cours, qui doit être alors cité. On arrive ainsi pas à pas au résultat attendu.
Exemple 1 : Montrer que si $-2 \leq x \leq 4$, alors $1/18 \leq 1/(x^2+1) \leq 18$.
Exemple 2 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \leq x$.

Plus généralement, même si on ne vous donne pas le résultat final, il y a beaucoup de questions pour lesquelles il suffit de répéter une méthode classique qui mène toujours au résultat. Par exemple, factoriser un polynôme de degré deux en calculant le discriminant ou étudier les variations d'une fonction à l'aide du signe de la dérivée.

2.3 Chercher en commençant par simplifier le problème.

Quand dans la vie vous vous heurterez à un problème difficile, vous commencerez sûrement par vous attaquer à une forme plus simple de ce problème. C'est l'occasion d'en découvrir les difficultés, mais, par petits morceaux, pas toutes en même temps ou, du moins, dans un cadre plus simple ou plus agréable que celui de l'énoncé initial. C'est une manière de faire apparaître des idées souvent fondamentales pour la preuve cherchée, en dégageant la lourdeur et parfois le superflu du cadre général et de son formalisme. Quand on commence à faire du vélo, on est tenu par quelqu'un ou deux roues sur les côtés. Quand on commence l'escalade, on ne s'attaque pas directement à la face nord de l'Everest. Il en va de même en mathématiques.

Quand on cherche en mathématiques, d'une façon ou d'une autre, on commence souvent par se mettre dans un cadre plus simple. Attention toutefois à ne pas trop simplifier le problème car il risque de perdre toute sa substance et on n'en tirera pas grand-chose.

Un premier exemple : si une propriété concernant un triangle doit être démontrée, on commencera à la vérifier pour un triangle équilatéral, puis pour un triangle isocèle et enfin on essaie de trouver une démonstration dans le cas général.

Un autre exemple : si on doit montrer une propriété pour tous les entiers, on commence par la vérifier pour les premiers entiers. On peut parfois voir pourquoi la propriété est vraie en général. Typiquement, si vous arrivez à propager la propriété d'un entier à l'entier suivant, vous pourrez montrer le résultat *par récurrence* .

Une image permettant de comprendre ce mécanisme est donnée par les dominos que l'on aligne les uns derrière les autres de façon à ce que la chute de l'un entraîne la chute du suivant. Il suffit alors de faire tomber le premier domino pour que tous tombent, l'un après l'autre. Montrer une propriété par récurrence revient à vérifier que le premier domino chute et que la chute de n'importe quel domine entraîne forcément la chute du domino suivant.

La blague suivante est une autre illustration (elle implique des mathématiciens).
Blague : Trois mathématiciens ont l'habitude de voyager avec un seul billet de train pour trois, lorsqu'ils se rendent à un colloque. Ils croisent à un colloque de physique mathématique trois physiciens qui leur demandent comment ils font, quand le contrôleur vient les contrôler, pour ne pas être verbalisés. Les matheux répondent qu'ils vont discrètement tous les trois aux toilettes et glissent un seul billet sous la porte quand le contrôleur vient frapper. Au retour, les trois physiciens achètent un seul billet et les

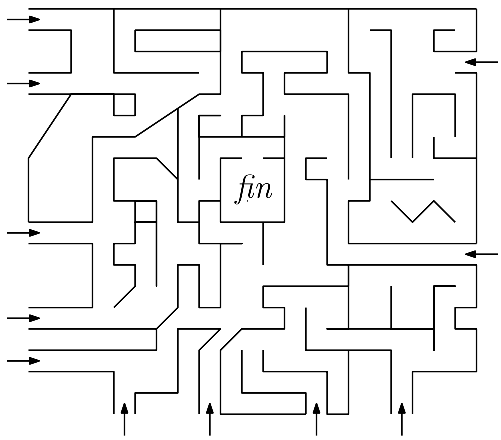
mathématiciens n'achètent pas de billet.

Comment font ils ? Lorsque le contrôleur approche et que les trois physiciens se précipitent dans les toilettes, ils attendent que la porte soit refermée et vont frapper à la porte en disant "Contrôle des billets", puis il se sont ramenés à la situation avec un billet de train, où ils savent quoi faire pour éviter la verbalisation (tandis que les physiciens sont expulsés du train ?)...

2.4 Chercher en partant de la solution (lorsqu'elle est donnée...)

On nous a souvent dit qu'il ne fallait pas partir de la solution. Mais cela peut se révéler bien pratique. Imaginons (et c'est un peu vrai) qu'une preuve est un chemin à parcourir. Ce chemin est parfois difficile à trouver, un parcours dans la jungle avec quelques passages cachés, jusqu'au point d'arrivée : la conclusion. Et bien, en partant du point d'arrivée, il est possible que la solution apparaisse plus facilement.

Les labyrinthes où il faut joindre le trésor au milieu depuis le bord donnent une image de cette situation. En partant du début, vous vous retrouvez parfois dans des situations dans lesquelles vous ne savez pas où aller. Mais en sens retour, c'est-à-dire en partant de la solution, la route est claire. Proposez un tel exemple ! Et regardez celui ci



Voici un autre *exemple* sous forme de jeu : « Deux joueurs disent successivement des chiffres entre 1 et 9 et la somme est faite au fur et à mesure. Le premier qui dit 100 gagne. » Comment jouer ?

Si je veux dire 100, il faut que celui d'avant dise un nombre entre 91 et 99, et je vais donc vouloir dire 90 à l'étape précédant ma victoire. On réalise en itérant qu'il faut laisser l'autre commencer et dire 10 puis 20 puis 30, jusqu'à 90. Peut-être aviez vous deviné directement cette stratégie, mais elle apparaît naturellement en partant de la solution, et devant des problèmes plus complexes, cette approche peut être décisive.

Plus généralement, une technique en mathématiques consiste à supposer le résultat dans un premier temps, de manière à faire apparaître des éléments de la preuve. C'est un peu comme se mettre dans la peau du meurtrier en espérant le démasquer. Cette technique s'appelle l'analyse-synthèse, la phase de synthèse étant là pour donner la véritable preuve.

Mais attention, ceci n'est valable que pour la phase de recherche. Dans votre rédaction finale, ne partez pas de la solution. Il faut rédiger de l'hypothèse de départ pour arriver à la solution par une série d'arguments logiques. La façon dont vous avez trouvé la solution n'intéresse pas le correcteur. Lui regarde uniquement la solution du problème avec un point de départ et d'arrivée.

2.5 Dessiner c'est gagné.

Le support visuel ou intuitif peut être un bon moyen de faire apparaître la solution. Il ne viendrait à l'idée d'aucun élève de ne pas dessiner les figures pour un exercice de géométrie. Il peut être très profitable également de tracer d'une même couleur les droites parallèles, d'indiquer les cotés égaux, les angles droits, etc. Et bien souvent en mathématiques, tracer peut être une aide pour la démonstration et s'avère parfois nécessaire. C'est le cas typiquement pour des exercices sur les fonctions ou pour la "géométrie des formes et espaces" que vous verrez après le bac, appelée topologie.

Un exemple. Un vieux corse monte en train au sommet d'une montagne en partant à 10h. Il redescend à pied par le même chemin le lendemain, en partant à la même heure.
Montrer qu'il y a un endroit précis où il repasse à exactement la même heure que la veille. (Faites un dessin !)

III Comment apprendre son cours et retravailler ses exercices ?

Il faut que vous soyez acteur dans votre travail. Ceci est indispensable pour assimiler les nouvelles notions, pour lesquelles vous n'avez aucun repère. Concrètement, il faut questionner votre cours et les exercices.

Nous allons donner des conseils sur trois axes : comment structurer l'apprentissage de son cours, comment apprendre une démonstration et comment revoir ses exercices.

Première étape. Pour apprendre son cours, il faut commencer le jour du cours en question. En général, cette étape n'excède pas une demi-heure. Il faut voir la structure du cours, apprendre les définitions et les théorèmes (sans les démonstrations). Essayez de hiérarchiser votre cours, voir quels théorèmes sont vraiment importants et ce qu'ils apportent de nouveau. Est-ce qu'une propriété contient une idée importante ou est-ce un détail technique ? Ainsi, même si vous n'avez pas eu le temps d'en faire plus, le lendemain, vous ne serez pas perdu en cours car vous comprendrez le langage employé par votre professeur. En effet, il est important de suivre pendant le cours même si vous ne comprenez pas tout au début. Ceci diminue fortement le travail à la maison car, en cours, vous faites travailler votre mémoire auditive et visuelle. En particulier, il est nécessaire de bien connaître le vocabulaire utilisé par votre professeur en apprenant au fur et à mesure les définitions. Cette étape est obligatoire après chaque cours de maths.

Deuxième étape. Apprendre ses démonstrations. Il est aussi préférable de le faire le soir même qui suit le cours. Comment s'attaquer à une démonstration ? Dans un premier temps lisez-la en diagonale pour dégager la structure de la preuve. Essayez de repérer les endroits où se trouvent les idées mathématiques et ceux où se trouvent les détails techniques (les calculs) qui ne comportent pas de raisonnement. Dans un deuxième temps, essayez de comprendre étape par étape. Dans un troisième temps, interrogez chaque étape : « pourquoi prenons-nous x dans tel ensemble ? pourquoi passe-t-on par ce raisonnement ? ». Ne jamais oublier l'objectif et toujours mettre en relation chaque étape avec celui-ci. Il faut surtout ne pas se perdre dans un enchaînement de raisonnements, ne pas savoir où l'on va. Toujours se demander : « mais pourquoi je fais ci, pourquoi je fais ça ? ». Une fois que vous aurez bien fait tout cela, la structure de la preuve sera assimilée. Mais comment être sûr que c'est le cas ? Il faut que vous puissiez expliquer la démarche générale de la preuve en moins de 10 secondes. Ceci vous permet de voir la part du raisonnement et celle de la technique dans la preuve. Il faut réussir à trouver où est l'idée de la preuve (il n'y en a pas plus de 2 en général), ce qui la fait marcher, c'est-à-dire réduire la preuve au maximum pour trouver son noyau. L'idée d'une preuve se résume en une phrase. Enfin laissez quelques jours et refaites la preuve. Mais il faut d'abord se souvenir du résumé de votre preuve, c'est-à-dire de la démarche générale que vous avez résumée en 10 secondes. Ensuite tout le côté technique revient naturellement quand la structure est énoncée clairement. Surtout, quand vous commencez une preuve, ne faites pas appel à votre mémoire en vous disant « alors là on posait x, ensuite on posait y, ensuite on faisait $\cos(17x-28y)\sin(x+y)$... ». Autrement dit, travaillez la logique plutôt que la mémoire ! En résumé, il faut questionner davantage les choses, ce qui prend du temps mais devient rentable car vous créez vos propres mécanismes de raisonnement. De plus, cela développe votre capacité d'improvisation pour les exercices. Connaître ses démonstrations permet de décalquer celles-ci pour la résolution d'exercices. Enfin, cela permet de mieux comprendre les hypothèses d'un théorème. Si vous le pouvez, demandez-vous si le théorème reste vrai lorsque l'on affaiblit les hypothèses. Si vous enlevez une hypothèse, cherchez l'endroit où la démonstration se met à « clocher ». Encore mieux, pouvez-vous alors trouver un contre-exemple ? Cela est très formateur et vous rend actif dans votre apprentissage du cours.

Troisième étape. Revoir ses exercices. Il est préférable d'essayer de refaire les exercices le soir après le cours ou le lendemain. Si vous n'y arrivez pas, c'est normal. Mais passez un peu de temps à réfléchir, car ce n'est pas du temps perdu dans la mesure où vous identifierez l'endroit exact de vos difficultés et où le fait de réfléchir est le meilleur moyen d'assimiler les nouvelles notions. En effet, c'est l'occasion de les manipuler ou même de les questionner pour voir si l'on est bien dans le cadre de l'utilisation de tel résultat, et sinon, ce qu'il faut faire pour y remédier. Cela vous incite donc à poser le problème autrement pour arriver à voir les hypothèses d'un théorème. De plus, réfléchir vous permet d'identifier les difficultés de l'exercice, et donc la solution vous semblera plus naturelle. D'autre part vous pourrez plus facilement réagir par la suite lorsque vous rencontrerez la même difficulté. Mais il faut réfléchir un temps raisonnable c'est-à-dire 10 à 15 minutes par exercice. Lorsque vous êtes face à un exercice qui vous semble facile, ne vous dites pas « je sais le faire, donc je ne le refais pas. ». Il faut le refaire par écrit, et vous aurez peut-être des surprises. Ensuite, vous pouvez étudier la correction et, surtout, il est alors bon de faire comme pour l'apprentissage d'une démonstration. Quand vous avez fini, il est très formateur de confronter l'énoncé et la méthode employée, c'est-à-dire « j'ai ça dans l'énoncé, alors j'ai utilisé ... ».

Ne pas hésiter à répertorier les méthodes, mettre en évidence des groupements d'exercices où l'on a employé la même méthode et voir ce qu'ils ont en commun. Vous allez vous rendre compte à la fin qu'il n'y a pas tant de méthodes que cela. Elles peuvent tenir sur le recto d'une petite fiche. Il me semble même que, quitte à faire des fiches, se faire ses propres fiches-méthodes, plutôt que des fiches de cours, reste le plus efficace. Si vous avez des difficultés, laissez de côté les exercices difficiles, revoyez bien les plus abordables au lieu de vouloir tout faire. Mieux vaut en faire peu mais bien. Il ne faut surtout pas tomber dans le travers de la boulimie d'exercices qui consiste à en survoler beaucoup en espérant avoir vu toutes les situations. Cela n'apporte rien, car le seul moyen de retenir quelque chose, c'est d'être actif et donc prendre du temps sur un exercice. Retenir n'est d'ailleurs pas le mot approprié, il s'agit plutôt d'acquérir des réflexes logiques. Ainsi, vous serez capable de réutiliser cet enseignement dans des situations proches. Si vous avez travaillé uniquement avec votre mémoire, vous ne saurez pas vous adapter, même dans des situations très proches. Avoir bien conscience qu'en mathématiques, on ne retient pas, mais on réfléchit, est essentiel.

IV Comment bien rédiger en mathématiques ?

Nous donnons ici quelques conseils sur l'écriture de preuves en mathématiques.

4.0.1 Le français

1. Supprimer les fautes d'orthographe.
2. La présence d'accents est une règle orthographique à respecter.
3. Corriger les fautes de grammaire : accord des adjectifs avec un nom au féminin ou au pluriel, accord des verbes.
4. Les phrases doivent contenir un sujet et un verbe.
5. Utiliser des mots de liaison.
   (a) Or : présente le fait qui permet de conclure ou qui explique ce qui suit.
   (b) Comme : parce que, vu que, puisque, attendu que.
   (c) Ainsi : signifie la conséquence logique ; équivaut à ; par conséquent, de ce fait.
   (d) Soit : sert à introduire l'explication de ce qui vient d'être dit, une nouvelle notation.
   (e) Finalement : souligne le caractère conclusif de quelque chose.

(f) D'après : en conséquence de, conformément à.

6. Veiller à bien conjuguer le verbe
résoudre : je résous, tu résous, il résout, nous résolvons, vous résolvez, ils résolvent.

7. Veiller à bien orthographier les termes mathématiques (intervalle, commutativité...)

4.1 Les mathématiques

1. Supprimer tous les mélanges mathématiques / français. Par exemple, on choisira une des deux formulations suivantes.

   (a) Il existe une fonction f de la variable réelle à valeurs réelles telle que pour tout nombre réel x, on ait $f(x) = 0$.

   (b) $\exists f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

2. Utiliser les notations et les codes de l'énoncé. Si la fonction s'appelle g, ne pas l'appeler f...

3. Ne pas commencer une question par un calcul mais par une phrase introductive.

4. Bien faire la différence entre ce qu'on sait et ce qu'on cherche.

5. Veiller à introduire tous les objets utilisés : soit ... un ... appartenant à....

6. Justifier précisément ses affirmations : comme ... (hypothèses), d'après le théorème / la formule / la caractérisation / la propriété de ... , le (la) .... est ....

7. Etre précis dans le vocabulaire : ne pas confondre fonction et évaluation, suite et terme général...

4.2 Donner le bon argument

En premier lieu, il faut prendre conscience qu'on ne s'adresse pas de la même manière à deux personnes très différentes. Les explications ne seront pas les mêmes suivant le public visé.

Fondamentalement, il y a deux questions à se poser : la personne à laquelle vous vous adressez est-elle savante ou pas ? Cherchez-vous à montrer que vous avez compris (quand vous faites un devoir par exemple) ou cherchez-vous à expliquer quelque chose à quelqu'un qui ne connaît pas le sujet (par exemple un camarade de classe).

Une question très souvent posée par les élèves est : "qu'est-ce qu'on doit mettre comme détails dans une réponse pour avoir tous les points ?"

Règle 1 : Si, en réfléchissant, on a besoin d'un argument pour avancer dans notre réflexion, alors cet argument doit apparaître dans la rédaction.

Règle 2 : Il ne faut rien dire d'inutile. Le but est d'être le plus concis et élégant possible.

Règle 3 : En cas de doute, la règle **1** l'emporte sur la règle **2**.

Règle 4 : Toujours aérer sa rédaction : on doit pouvoir revenir et ajouter ou rectifier des choses plus tard, quand on aura une meilleure vision de la question qu'on est en train de traiter.

Chaque étape de votre raisonnement doit être justifiée. L'argument doit suffire à convaincre, mais pour autant vous ne devez pas en mettre trop, c'est-à-dire mettre du superflu. Il ne faut pas noyer le lecteur avec une masse de justifications en espérant que la bonne est dedans et que cela suffit. À vous d'essayer de mettre ce qu'il faut pour justifier, sans avoir la main lourde, comme en cuisine avec les épices par exemple. Évitez d'y aller à la machette là où un scalpel conviendrait mieux...

4.3 Les raisonnements

A priori, vous partez des hypothèses et essayez à travers une suite d'étapes justifiées d'arriver à la conclusion. Indiquez ce que vous allez faire et concluez une fois que c'est fait. Nous vous conseillons d'éviter les démarches tordues et d'essayer d'avoir une démarche linéaire au moment de la rédaction, en enchaînant les implications dont vous ne doutez pas. À moins de maîtriser cet art ou d'être dans une situation simple, il vaut mieux éviter les équivalences ou les raisonnements qui mélangent les « donc » (implication) et les « si » (implication réciproque).

Pour autant, en mathématiques, on est souvent amené à s'appuyer sur les raisonnements suivants, qui permettent de prouver les résultats et de rédiger efficacement la preuve.

Récurrence.
Pour montrer qu'un résultat est vrai pour tous les entiers, il suffit de le prouver pour le premier entier (initialisation) et de montrer que, s'il est vrai pour l'un, il est aussi vrai pour le suivant (hérédité). C'est comme les dominos qui se font tomber les uns à la suite des autres. Si vous souhaitez les faire tous tomber, vous les placez à distance suffisamment courte pour que la chute de l'un entraîne la chute du suivant. La chute du premier domino entraîne alors la chute de tous les dominos! C'est un raisonnement très puissant, en particulier pour les problèmes sur les suites, en arithmétique ou, plus généralement, en algèbre.
Si vous devez (ou voulez) montrer un résultat pour tout entier, c'est souvent une bonne méthode, surtout si vous sentez que vous pouvez ramener le problème pour un entier au même problème pour un ou des entiers qui le précèdent.

Absurde.
Si vous voulez montrer qu'une proposition A est vraie, vous pouvez adopter la stratégie suivante : et si A était fausse, qu'est-ce que cela voudrait dire ? Qu'est ce que ça entraînerait ? Et bien, allons-y et essayons de faire apparaître un problème quelque part, une absurdité. C'est-à-dire quelque chose de faux, comme $1 = 0$, ou bien en contradiction avec une hypothèse de notre énoncé. Si une telle absurdité apparaît, c'est que l'on ne pouvait pas supposer A fausse, et donc que A est vraie (car A est ou bien vraie, ou bien fausse). Tout cela demande d'être à l'aise avec la négation d'une proposition. Ce raisonnement apparaît à plusieurs moments au lycée ($\sqrt{2}$ est irrationnel). En particulier, si on ne voit pas comment prouver A mais que la négation de A se traduit bien sous forme mathématique, c'est sûrement un bon chemin!

Analyse-synthèse ou « remonter la preuve ».
Le raisonnement précédent fournit une preuve parfaitement valide : il consiste à partir de la négation de la conclusion souhaitée et faire apparaître une absurdité. Peut-on carrément partir du résultat souhaité? Et bien non, bien sûr, puisque c'est ce qu'il faut établir. Pour autant, faire cela peut être bien instructif pour en trouver une preuve. Plus précisément, en partant du résultat, vous pouvez faire apparaître des choses intéressantes. Si vous aboutissez à l'hypothèse, vous avez fait « la preuve à l'envers », mais peut-être pouvez-vous la remettre à l'endroit, c'est-à-dire transformer les implications en implications réciproques. Plus généralement, l'analyse-synthèse fait apparaître des ingrédients de la preuve, comme les termes d'une décomposition ou exhiber une existence. C'est assez subtil et nous renvoyons à la rubrique précédente (Résoudre un problème) .

4.4 Présenter sa copie

Nous finissons par quelques conseils sur la manière d'organiser sa copie et de rédiger.

1. Utiliser une couleur d'encre qui contraste avec le quadrillage des copies (le noir ou le bleu sont recommandés).

2. Utiliser une graphie irréprochable : écrire sur les lignes, écrire les indices en indice, les exposants en exposant...

3. Utiliser judicieusement les indentations :

   (a) centrer les résultats principaux ;

   (b) mettre en évidence les différentes étapes de raisonnement (Analyse/Synthèse, Initialisation/Hérédité/Conclusion, Disjonction de cas).

4. Donner une justification par ligne.

5. Aérer la copie en sautant des lignes.

6. $\boxed{\text{Encadrer vos résultats ou conclusions !!!}}$.